DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'espace euclidien à trois dimensions, orienté, est muni du repère orthonormé direct $[O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ définissant les axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. Le plan d'équation $z = 0$ est orienté par le repère $[O; \vec{i}, \vec{j}]$.

Les constantes strictement positives a et ω sont mesures d'une longueur et d'une vitesse angulaire.

A tout réel φ, on associe les vecteurs

$$\begin{cases} \vec{T} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \\ \vec{N} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

I

I. 1° Pour chaque $\varphi \in \mathbb{R}$, on considère les deux points C et P :

$$\overrightarrow{OC} = a\vec{T} \qquad \overrightarrow{CP} = -a\varphi\vec{N}$$

Lorsque φ décrit $\mathbb{R}$, le point P décrit une courbe (L_0) dont on demande la représentation paramétrique (paramètre φ).

Montrer que $\vec{T}$ est vecteur unitaire de la tangente en P à (L_0).

I. 2° Préciser le centre de courbure de (L_0) en P. Quelle est la courbe décrite par ce centre de courbure?

I. 3° Calculer, en fonction de φ, un couple de coordonnées polaires (θ, ρ) de P [ρ strictement > 0 ; pôle O, axe polaire Ox].

I. 4° Déterminer une équation polaire de la courbe décrite par le point H, projection orthogonale de O sur la tangente en P à (L_0).

II

II. 1° A tout réel fixé α, on associe la courbe (L_α) décrite, lorsque φ parcourt $\mathbb{R}$, par le point Q défini par :

$$\overrightarrow{PQ} = a\alpha\vec{N}$$

Déterminer, en fonction de φ et de α, les coordonnées x_Q et y_Q du point Q. On posera

$$\begin{cases} x_Q = f(\varphi, \alpha) \\ y_Q = g(\varphi, \alpha) \end{cases}$$

II. 2° *Cinématique.* — On définit le mouvement de Q sur (L_α) par la loi $\varphi = \omega t$, t étant le temps. Calculer les vecteurs $\vec{V}_Q$ et $\vec{\Gamma}_Q$ vitesse et accélération de Q à l'instant t. Montrer que

$$\vec{\Gamma}_Q = \omega^2\overrightarrow{QU} \qquad \text{où} \qquad \overrightarrow{OU} = 2\overrightarrow{OC}$$

II. 3° Montrer que le transformé de Q dans la rotation de centre O et d'angle $(-\alpha)$ est un point de (L_0). Comment passer de (L_0) à (L_α) ?

III

III. 1° A chaque couple $(\varphi, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, correspond le point M de coordonnées

$$\begin{cases} x = f(\varphi, \alpha) \\ y = g(\varphi, \alpha) \end{cases}$$

Les deux fonctions f et g sont définies au II. 1°.

Montrer qu'au point M_0 associé à (φ_0, α_0) les courbes définies par $\varphi = \varphi_0$, $\alpha = \alpha_0$ se coupent à angle droit.

III. 2° Représenter la partie (D) du plan d'équation $z = 0$, associée à l'ensemble (Δ) des couples (φ, α) tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

(Représenter (D) avec soin en prenant $a = 4$ cm.)

III. 3° Calculer l'aire A de (D). On pourra utiliser la formule :

$$A = \iint_{(\Delta)} \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha} \right\| d\varphi\, d\alpha$$

. . ./. . .

IV

A tout réel φ, on associe la droite (G_φ) passant par le point P de paramètre φ sur (L_0) et dirigée par le vecteur unitaire :

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{T} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

Lorsque φ parcourt $\mathbb{R}$, (G_φ) engendre la surface réglée (Σ).

IV. 1° On considère les deux *génératrices* (G_φ) et (G_{φ_1}) de (Σ), passant respectivement par les points P et P_1 (paramètres φ et φ_1) et dirigées respectivement par

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{T} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{u_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{T_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

(On rappelle que $\vec{T_1} = \cos\varphi_1\,\vec{i} + \sin\varphi_1\,\vec{j}$.)

Les réels ρ et ρ_1 définissent les points K et K_1 sur (G_φ) et (G_{φ_1}) par

$$\overrightarrow{PK} = \rho\,\vec{u} \qquad \overrightarrow{P_1K_1} = \rho_1\,\vec{u_1}$$

Montrer que le pied J sur (G_φ) de la perpendiculaire commune JJ_1 à (G_φ) et (G_{φ_1}) est déterminé par

$$\rho_J = \overline{PJ} = \frac{\overrightarrow{PP_1}\cdot\left[\vec{u} - \left(\vec{u}\cdot\vec{u_1}\right)\vec{u_1}\right]}{1 - \left(\vec{u}\cdot\vec{u_1}\right)^2}$$

IV. 2° Gardant φ fixe et posant $\varphi_1 = \varphi + h$, déterminer, lorsque h tend vers 0, la limite du point J sur (G_φ).

IV. 3° Déterminer l'ensemble des points de (Σ) en lesquels le plan tangent à (Σ) est parallèle à $z'Oz$.

V

Le repère $[O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$ est pris pour repère absolu; avec la loi du temps $\varphi = \omega t$, on définit le repère relatif $[P\,;\vec{T},\vec{N},\vec{k}]$. Les coordonnées absolues sont notées : (x, y, z) et les coordonnées relatives (X, Y, Z).

Soit (S) le solide lié au repère relatif, c'est-à-dire formé par l'ensemble des points μ dont les coordonnées relatives X, Y, Z sont constantes. On désignera par μ_1 le point de (S) projection orthogonale sur le plan d'équation $Z = 0$ d'un point μ de (S).

V. 1° Déterminer le champ des vitesses, à un instant t, des points μ de (S). Préciser le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}$. $\vec{V_\mu}$ et $\vec{\Gamma_\mu}$ désignant les vecteurs vitesse et accélération (absolues) d'un point μ, exprimer $\vec{V_\mu}$ au moyen de $\vec{\Omega}$ et démontrer que

$$(1) \qquad \vec{\Gamma_\mu} = \vec{\Gamma_{\mu_1}} = +\,\omega^2\,\overrightarrow{\mu_1 U} \qquad [U \text{ défini au II. } 2°.]$$

V. 2° Retrouver la formule (1) en considérant le mobile U et le point λ de (S) coïncidant avec U à l'instant t.

α. On pourra calculer l'accélération relative de U puis son accélération d'entraînement (qui est l'accélération de λ).

β. Utilisant alors $\dfrac{d^2\,\overrightarrow{\lambda\mu_1}}{dt^2}$ retrouver (1).

V. 3° Déterminer, géométriquement, dans (S), l'ensemble des points μ satisfaisant à la condition d'avoir, à l'instant t, une accélération tangentielle de norme donnée γ_1.

De même, déterminer l'ensemble des points dont l'accélération normale a une norme donnée γ_2.

N.B. — *Les parties* III, IV, V, *sont, deux à deux, indépendantes.*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail